Matemática

- SEMANA Nº: 3
- CLASE: Nº 2
- CURSO: II medio
- DOCENTE: Edmundo Pozo – Jessica Rossel
- CORREO ELECTRÓNICO: jrossel@americanacademy.cl
  (Solo será contestado en días y horarios hábiles)

OBJETIVOS: Efectuar operaciones con potencias y raíces aplicando sus propiedades CONTENIDOS DE LA SEMANA: Raíces y potencias

Guía de Matemática

Instrucciones: Ahora realizaremos juntos ejercicios de raíces, luego la tercera clase lo harás solo(a).

Expresión de una raíz en forma de potencia $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Por ejemplo, para expresar una potencia fraccionaria como una raíz: a) $9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$

b) $5^{0.5} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

c) $12^{0.2} = 12^{\frac{2}{10}} = 12^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{12}$

Ejemplos de cómo expresar una raíz como una potencia fraccionaria

a) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{5}}} = x^{-\frac{1}{5}}$

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$

c) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{15+10+12}{30}} = x^{\frac{37}{30}}$

Simplificación de raíces

Si existe un número natural que divida al índice y al exponente (o los exponentes) de la raíz, se obtiene una raíz equivalente. $\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$

a) $\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$

b) $\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[2]{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$

c) $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

Reducción de raíces a índice común

1 Hallamos el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice

2 Dividimos el común índice por cada uno de los índices y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes.

$\sqrt{2}$ $\qquad \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}$ $\qquad \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$

$\text{m.c.m.}(2, 3, 4) = 12$

$\sqrt[12]{2^6}$ $\qquad \sqrt[12]{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4}$ $\qquad \sqrt[12]{(2^2)^3 \cdot (3^3)^3}$

$\sqrt[12]{2^6}$ $\qquad \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8}$ $\qquad \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^9}$

Extracción de factores fuera del signo de raíz

Se descompone la raíz en factores. Si un exponente es menor que el índice, el factor correspondiente se deja en la raíz.

a) $\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3}$

b) $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$

Si un exponente es igual al índice, el factor correspondiente sale fuera de la raíz.

a) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

Si un exponente es mayor que el índice, se divide dicho exponente por el índice. El cociente obtenido es el exponente del factor fuera de la raíz y el resto es el exponente del factor dentro de la raíz.

a) $\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot 5^2 \sqrt{2 \cdot 5}$

b) $\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}$

Raíz de una raíz

La raíz de una raíz es otra raíz de igual radicando y cuyo índice es el producto de los dos índices. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

a) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\mathbf{2}}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\mathbf{2}}}} = \sqrt[24]{\mathbf{2}}$

b) $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4\sqrt[4]{2}}} =$

$= \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{(2^4)^4\cdot \mathbf{2}}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\mathbf{2}^{16}\cdot \mathbf{2}}}} = \sqrt[24]{\mathbf{2}^{17}}$

Suma de raíces

Solamente pueden sumarse (o restarse) dos raíces cuando son raíces semejantes, es decir, si son raíces con **<u>el mismo índice e igual raíz</u>**.

a) $3\sqrt{18}+5\sqrt{32} = 3\sqrt{3^2\cdot 2}+5\sqrt{2^5} = 3\cdot 3\cdot\sqrt{2}+5.2^2\cdot\sqrt{2} = 9\sqrt{2}+20\sqrt{2} = 29\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{5}+\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80} = 2\sqrt{5}+\sqrt{3^2\cdot 5}+\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5} =$
$= 2\sqrt{5}+3\sqrt{5}+6\sqrt{5}-4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$

c) $3\sqrt{8}-5\sqrt{72}+\sqrt{50}+4\sqrt{18} = 3\sqrt{2^3}-5\sqrt{2^3.3^2}+\sqrt{2.5^2}+4\sqrt{2.3^2} = 6\sqrt{2}-30\sqrt{2}+5\sqrt{2}+12\sqrt{2} =$
$-7\sqrt{2}$

d) Simplifica al máximo la expresión $3\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{250}+5\sqrt[3]{54}-4\sqrt[3]{2}$

Descomponemos primero cada una de las raíces para extraer factores de la raíz. Tenemos que $16=2^4=2\cdot 2^3$, $250=2\cdot 5^3$, $54=2\cdot 3^3$; por lo que tenemos

$3\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{250}+5\sqrt[3]{54}-4\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2\cdot 2^3}-2\sqrt[3]{2\cdot 5^3}+5\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-4\sqrt[3]{2} = 3\cdot 2\cdot\sqrt[3]{2}-2\cdot 5\cdot\sqrt[3]{2}+5\cdot 3\cdot\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{2} =$
$= 6\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}+15\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$

e) Simplifica la expresión $\sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{16}+\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{50}-\sqrt{98}$

Tenemos que conseguir radicales semejantes, para ello tenemos en cuenta que

$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[6]{2^8}$ (Para poder multiplicar raíces deben tener mismo índice) $\Rightarrow$ $\quad\Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{2}}\sqrt[3]{16} = \sqrt[6]{2}\sqrt[6]{2^8} = \sqrt[6]{2^9} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$ Se puede simplificar una raíz dividiendo el índice de la raíz y el exponente por un mismo número. Sacamos factores de las demás raíces:

$\frac{1}{2}\sqrt{32} = \frac{1}{2}\sqrt{2^5} = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{50} = \sqrt{5^2\cdot 2} = 5\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{98} = \sqrt{7^2\cdot 2} = 7\sqrt{2}$

Sustituyendo todo ello en $\sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{16}+\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{50}-\sqrt{98} = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-5\sqrt{2}-7\sqrt{2} = -8\sqrt{2}$

Observación: Otra forma de hallar la solución: Se puede hacer utilizando las propiedades de las potencias

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} + 2^{-1} \cdot 2^{\frac{5}{2}} - 5 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{5}{2}-1} - 12 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}+\frac{4}{3}} + 2^{\frac{3}{2}} - 12 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{9}{6}} + 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 12 \cdot 2^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} - 10 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 10 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = -8 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = -8\sqrt{2}$$

Racionalizar

Consiste en quitar las raíces del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones. $\frac{a}{b\sqrt{c}}$ Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b \cdot c}$$

Ejemplos:

a) $$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

b) $$\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$